Nauka bez granic | Studia Historiae Scientiarum

Krzysztof Maślanka
ORCID 0000-0003-4010-4093
Instytut Historii Nauki im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów
Polskiej Akademii Nauk (Warszawa, Polska)
krzysiek2357@gmail.com

Jacek Rodzeń
ORCID 0000-0002-5321-4104
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
Instytut Dziennikarstwa i Informacji
j.rodzen@ujk.edu.pl

Ewa Wyka
ORCID 0000-0003-3822-7377
Instytut Historii Nauki im. Ludwika i Aleksandra Birkenmajerów
Polskiej Akademii Nauk (Warszawa, Polska)
ewawyka@gmail.com

Trójwymiarowe modele matematyczne na przykładzie obiektów ze zbiorów Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego

Abstrakt

W artykule podajemy przykłady modeli matematycznych, obecnie niemal zapomnianych, które jeszcze kilkadziesiąt lat temu odgrywały wielką rolę w dydaktyce matematyki. Z końcem XIX wieku

INFORMACJA O PUBLIKACJI	Studia Historiae Scientiarum	e-ISSN 2543-702X ISSN 2451-3202	Polska Akademia Umiejętności	BRYLANTOWY MODEL OTWARTEGO DOSTĘPU

CYTOWANIE
Maślanka, Krzysztof; Rodzeń, Jacek; Wyka, Ewa 2019: Trójwymiarowe modele matematyczne na przykładzie obiektów ze zbiorów Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego. *Studia Historiae Scientiarum* 18, ss. 257–293.
DOI: 10.4467/2543702XSHS.19.009.11015.

OTRZYMANO: 8.10.2018
ZAAKCEPTOWANO: 31.07.2019
OPUBLIKOWANO ONLINE: 15.11.2019

POLITYKA ARCHIWIZOWANIA Green SHERPA / RoMEO Colour

WWW http://www.ejournals.eu/sj/index.php/SHS/; http://pau.krakow.pl/Studia-Historiae-Scientiarum/

powstała prężna produkcja tych modeli na użytek szkół i uczelni. W Muzeum UJ zachowały się w doskonałym stanie trzy takie modele.

Słowa kluczowe: *modele matematyczne*, *Felix Klein*, *dydaktyka matematyki*, *Muzeum UJ*

Three-dimensional mathematical models illustrated by objects from the collections of the Jagiellonian University Museum

Abstract

This paper presents examples of mathematical models which have almost passed into oblivion, yet a few decades ago still played a significant role in the teaching of mathematics. In the late nineteenth century such devices started to be produced on a large scale for schools and universities. The Jagiellonian University Museum has three such models in perfect condition in its collections.

Keywords: *mathematical models*, *Felix Klein*, *didactics of mathematics*, *Museum of the Jagiellonian University*

1. Wizualizacja wiedzy – motywacje dydaktyczne

Trafna wizualizacja matematycznych struktur, głównie funkcji jednej lub dwu zmiennych, jest ważnym zadaniem w procesie dydaktycznym. Podobnie jest, gdy chodzi o rozmaite struktury chemiczne lub fizyczne, które nie są bezpośrednio dostępne dla wzroku, ale które można opisać matematycznie. Wspomniana wizualizacja to problem ważny z punktu widzenia dydaktyki i nadal rozwijany.

Przykład z nauczania początkowego: Wynalezione stosunkowo późno (1945 r.) tzw. klocki Cuisenaire'a, zwane również *kolorowymi liczbami* lub *liczbami w kolorach*, to przykład prostej, ale skutecznej i wciąż popularnej wizualizacji dotyczącej arytmetyki elementarnej[1]. Jest oczywiste,

[1] W Polsce zwolennikiem tej metody był pedagog Henryk Moroz (ur. 1924), który opracował własny układ klocków zatwierdzony później przez Ministerstwo Oświaty.

że nieodpowiedzialnie prowadzone nauczanie może nieodwracalnie zrazić młodych ludzi do matematyki jako dziedziny rzekomo „trudnej", „nudnej" lub „niehumanistycznej". Stąd dramatyczne i raczej retoryczne pytanie postawione przez cenionego amerykańskiego popularyzatora matematyki Williama Dunhama (ur. 1947):

> Dwie częste i typowe reakcje, gdy ktoś spotka matematyka: „Nie znoszę matematyki" lub: „Boję się matematyki". […] Dlaczego tak wielu ludziom matematyka kojarzy się z operacją chirurgiczną bez znieczulenia? Czyżby, jako dzieci, byli torturowani przez matematyka-sadystę?[2].

Były w historii dydaktyki matematyki chybione trendy dydaktyczne preferujące, w dobrej wierze – w imię czystej abstrakcji i szacunku dla precyzji – porzucenie przystępnych i poglądowych metod wizualizacji jako „nieścisłych" i uwłaczających godności królowej nauk. Prowadziły one czasem do kuriozalnych sytuacji. Przykładem tego jest przypadek dotyczący wybitnego matematyka francuskiego, członka sławnej grupy N. Bourbakiego[3] – Claude'a Chevalleya (1909–1984), który, właśnie w imię swoiście rozumianej czystości matematycznej, nie zalecał wykonywania nawet poglądowych rysunków. Chevalley

> był zdecydowanie przeciwny używaniu rysunków, i to nawet w rozumowaniach geometrycznych. Pewnego razu wygłaszał bardzo abstrakcyjny wykład i w pewnej chwili

---

[2] Dunham 1994, s. 164.

[3] Grupa wybitnych matematyków francuskich działających pod pseudonimem Nicolas Bourbaki preferowała metody czysto abstrakcyjne. Są autorami serii nieprzystępnych podręczników, odrzuconych przez fizyków matematycznych. W dydaktyce oficjalnie zalecano odejście od starych i sprawdzonych podręczników np. Édouarda Goursata w imię programu tzw. *New Math*. Podejście to ostro skrytykował matematyk rosyjski, pracujący pod koniec życia we Francji, Władimir Igoriewicz Arnold (1937–2010) w znanym eseju *O nauczaniu matematyki* (Arnold 2001).

Program bourbakistów postulował rewolucję w spojrzeniu na matematykę w ogóle, stawiając na pierwszym miejscu kwestię struktury i hierarchii pojęć. W założeniu nie dotyczył dydaktyki matematyki, chociaż z programu bourbakistów „nadgorliwcy" wysnuwali pewne wskazania także dla dydaktyki matematyki.Inaczej mówiąc, owe chybione trendy dydaktyczne były zawinione nie tyle przez samych bourbakistów, ile raczej przez ich interpretatorów. Za zwrócenie uwagi na tę kwestię dziękuję [K.M.] jednemu z Recenzentów.

> po prostu pogubił się. Po chwili namysłu odwrócił się do tablicy i – starając się, żeby nikt nie widział tego, co tam robi – dyskretnie narysował mały diagram, przyjrzał mu się, szybko go zmazał, po czym ponownie zwrócił się do słuchaczy i kontynuował wykład[4].

Anegdota ta pokazuje, że nawet wybitny matematyk może odnieść korzyść z trafnej wizualizacji i nie powinien nią gardzić.

2. Obrazy w fizyce, chemii i matematyce

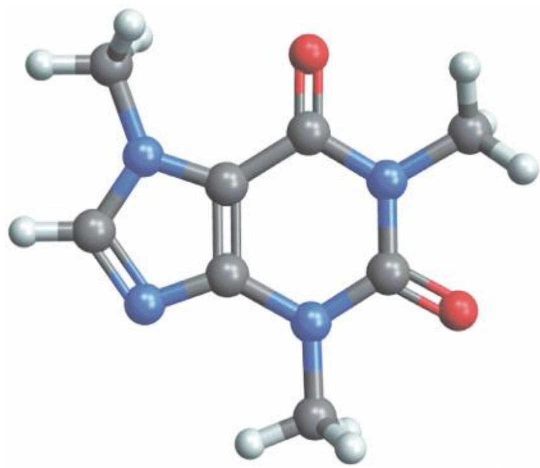
Z kolei w chemii popularne są poglądowe modele przestrzenne związków chemicznych jako kolorowych kulek (czasem jeszcze z literowymi oznaczeniami pierwiastków z tablicy Mendelejewa) odpowiednio łączonych patyczkami – wiązaniami chemicznymi (Ryc. 1, 2). Z punktu widzenia aktualnej teorii, tj. opartej na równaniu Schrödingera chemii kwantowej, niewiele mają one wspólnego z rzeczywistością. Jednak pozwalają zrozumieć i skutecznie zapamiętać pewne prawidłowości. Oczywiście, początkującym adeptom chemii zawsze trzeba przypominać, że takich modeli nie należy brać dosłownie. Jednak tłumaczenie wiązań chemicznych, na wstępnym etapie nauki, jako abstrakcyjnej chmury prawdopodobieństwa opisanej zespoloną funkcją falową, tj. rozwiązaniem równania różniczkowego Schrödingera – byłoby z góry skazane na dydaktyczną porażkę.

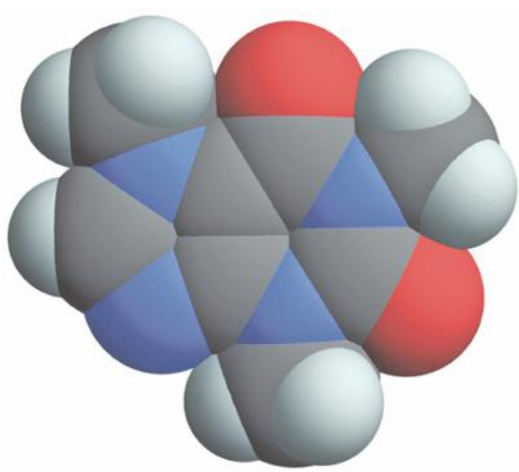
Można też podać przykład bardziej wyrafinowanej metody wizualizacji, która jednocześnie ma pewną głęboką interpretację teoretyczną. Są to tzw. diagramy Feynmana (Ryc. 3) wymyślone przez wybitnego fizyka amerykańskiego Richarda Feynmana (1918–1988), używane w kwantowej teorii pola – wyjątkowo trafna wizualizacja pewnych (z natury niedających się wyobrazić) procesów kwantowych, która w dodatku radykalnie ułatwia oraz porządkuje pewne bardzo zawiłe rachunki (1948 r.). Podobno sam Feynman, znakomity fizyk teoretyk i natchniony wykładowca, ilustrował swoje diagramy, używając patyczków.

Przejdźmy do konkretnego przykładu matematycznego, tj. do pojęcia pewnej funkcji zwanej *silnią*. (Polska nazwa jest dość osobliwa; we wszystkich innych językach funkcja ta ma czytelną nazwę pochodzącą

---

[4] Cyt. za: Sinclair 2008, s. 236.





Ryc. 1, 2. Dwa poglądowe modele cząsteczki kofeiny $C_8H_{10}N_4O_2$ (rysunki wykonano korzystając z programu *Mathematica* firmy Wolfram Research)

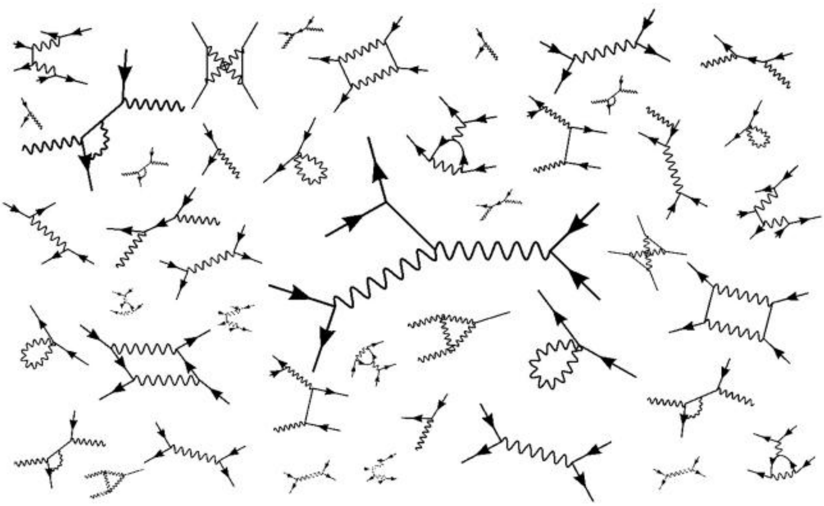
od łacińskiego określenia *factorialis*, która sugeruje mnożenie). Dla liczb naturalnych definicja silni jest bardzo prosta:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad (1)$$

Nieco mniej intuicyjna jest definicja rekurencyjna:

$$1! = 1 \qquad (2)$$

$$n! = (n-1)! \cdot n$$



Ryc. 3. Diagramy Feynmana, z których można obliczyć prawdopodobieństwo zajścia rozmaitych procesów w świecie cząstek elementarnych (rysunek wykonano przy użyciu ogólnodostępnego pakietu xACT)

Matematycy mają, niemal podświadomą, tendencję do uogólnień i formułowania związków, w których zakres zmiennej niezależnej nie jest ograniczony. Wielki matematyk szwajcarski Leonhard Euler (1707––1783) zauważył, że następująca definicja z użyciem całki oznaczonej ma identyczną własność, jak powyższa rekurencja (2):

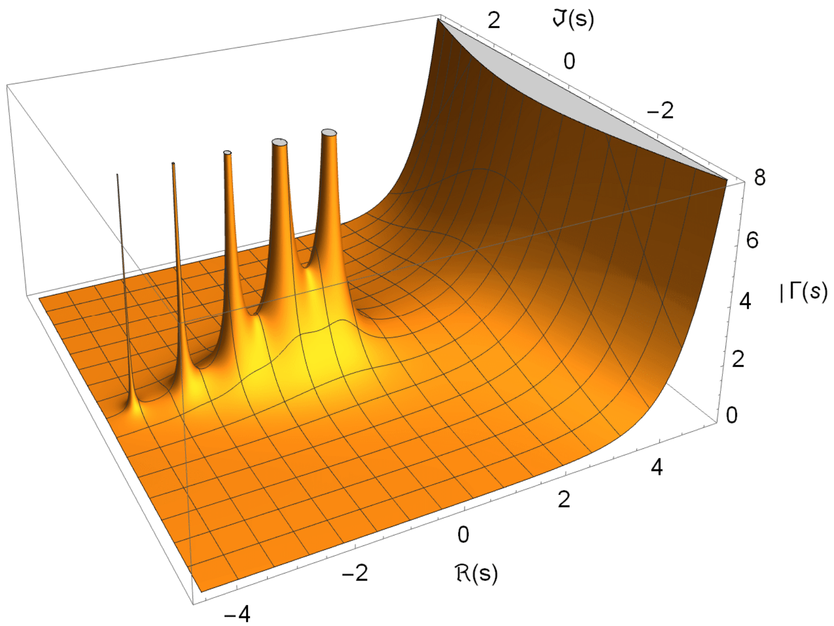
$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$x! = (x-1)! \cdot x$$

Taka niewątpliwa komplikacja ma jednak nieocenioną zaletę: formuła (3) pozwala nadać sens pojęciu silni dla liczb rzeczywistych x większych od minus jeden, a nawet dla liczb zespolonych s, których część rzeczywista Re s jest większa od minus jeden (Ryc. 4). Oczywiście, oryginalna, prosta definicja (1) zupełnie nie nadaje się do tego. Ścisła procedura tzw. przedłużenia analitycznego pozwala z kolei przypisać jednoznaczne wartości *wszystkim* liczbom zespolonym. W szczególności można uzyskać jednoznaczny i zaskakujący wynik:

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4}$$

Żeby zobaczyć pełny wykres funkcji *s*!, która dowolnej liczbie zespolonej (tj. parze liczb rzeczywistych) przypisuje odpowiednią liczbę zespoloną, trzeba by mieć do dyspozycji czterowymiarową tablicę. Tymczasem przestrzeń fizyczna ma (z nieznanych dotąd powodów) tylko trzy wymiary. Trzeba więc pójść na kompromis i wykonać np. wykres wartości bezwzględnej funkcji $s! \equiv \Gamma(s+1) = (x + i\,y)!$, który parze liczb rzeczywistych przypisze jedną liczbę rzeczywistą, a taki wykres można już narysować. Dzisiaj mamy do dyspozycji szybkie komputery wyposażone w odpowiednie programy (*Mathematica*, *Maple* i in.), które bez trudu rozwiążą takie zadanie.



Ryc. 4. Wykres wartości bezwzględnej funkcji silnia uogólnionej przez Eulera – formułą (3). Zaskakujące są osobliwości widoczne po lewej stronie w postaci serii coraz węższych „kominów" (rysunek wykonany przy użyciu programu *Mathematica* firmy Wolfram Research)

Tymczasem w wieku XIX i do połowy XX, gdy jedyną pomocą rachunkową były tablice matematyczne i suwaki logarytmiczne, sporą popularność przy wizualizacji skomplikowanych funkcji matematycznych zdobyły modele gipsowe, niekiedy z użyciem elementów metalowych i nitek jedwabnych. Niektóre z nich miały elementy ruchome – pozwalały na efektowną animację. Np. obrót zębatego koła o jakiś kąt odpowiadał zmianie pewnego abstrakcyjnego parametru matematycznego.

Staranność i precyzja wykonania tych przyrządów do dziś budzą podziw. Były konsultowane z zawodowymi matematykami, m.in. z twórcą sławnego programu erlangeńskiego (1872 r.) – wciąż aktualnego poglądu na istotę geometrii polegającego na oparciu jej na teorii grup – Felixem Kleinem (1849–1925).

Interesującą dziedziną jest sztuka lub architektura inspirowana przez geometrię tzw. powierzchni minimalnych[5] – dziedzina wciąż aktywnie rozwijana, o czym będzie jeszcze dalej mowa.

3. Od Oliviera do Kleina. Matematycy i artyści

Aby zrozumieć lepiej pojawienie się i rozpowszechnienie w XIX wieku trójwymiarowych modeli abstrakcyjnych obiektów matematycznych, a także powstanie ogólniejszej tendencji do tworzenia modeli materialnych w innych obszarach wiedzy ścisłej, zwłaszcza w fizyce i chemii, należy przyjrzeć się bliżej trendom rozwojowym tego okresu w naukach matematyczno-przyrodniczych, technice, ich edukacji, a także szeroko pojętej komunikacji wizualnej. Jak można się przekonać, wymienione obszary, w wielu przypadkach i przykładach, często spotykały się czy wręcz przecinały.

Korzenie wytwarzania i posługiwania się trójwymiarowymi modelami matematycznymi, jak się wydaje, tkwią w tym okresie rozwoju matematyki, który ściśle wiąże się z powstaniem znaczących europejskich, choć głównie francuskich, ośrodków kształcenia inżynierów wojskowych i cywilnych w drugiej połowie XVIII wieku (z najsłynniejszą École Polytechnique na czele). Podjęty w nich typ kształcenia wymagał od zatrudnianych w tych szkołach nierzadko wybitnych matematyków nie tylko wysokich kwalifikacji naukowo-teoretycznych, ale także umiejętności w posługiwaniu się formami przekazu nauczanych treści, jako że absolwentami mieli być głównie praktycy.

We wspomnianej ogólniejszej perspektywie wyróżniały się dokonania ściśle naukowe, ale i dydaktyczne jednego ze współzałożycieli École Polytechnique – Gasparda Monge'a (1746–1818) i jego uczniów.

---

[5] Są to powierzchnie, których tzw. średnia krzywizna Gaussa jest w każdym punkcie zero.

Monge uważany jest powszechnie za twórcę geometrii wykreślnej, a także za pioniera teoretycznych rozwiązań z zakresu geometrii rzutowej i różniczkowej. Jak się okazuje, francuski matematyk nie stronił od wykorzystywania w dydaktyce środków poglądowych uprzystępniających i wyjaśniających wykładane treści. W jednym z katalogów zbioru przyrządów i modeli zgromadzonych w założonej w czasie Rewolucji uczelni Conservatoire National des Arts et Métiers w Paryżu można znaleźć informację o wykonanych przez Monge'a, niestety niezachowanych do dzisiaj, trójwymiarowych modelach nitkowych hiperboloidy[6].

Nietrudno więc zrozumieć, że do wykładów z geometrii wykreślnej w paryskich szkołach technicznych własne modele wykorzystywał później uczeń Monge'a –Théodore Olivier. Znaczna część tych modeli reprezentowała matematyczne powierzchnie prostokreślne. Olivier budował przede wszystkim modele ruchome, przedstawiające zarówno generowanie takich powierzchni, jak i tworzenie krzywych powstałych przez ich przecięcie[7]. Ponieważ wiele modeli skonstruowanych na podstawie pierwotnych rozwiązań Oliviera przetrwało do dnia dzisiejszego w zbiorach muzealnych, obecnie można snuć przypuszczenia, jak dalece mogły one w XIX wieku pobudzać wyobraźnię przestrzenną słuchaczy wykładów z geometrii, zwłaszcza przyszłych inżynierów i architektów[8].

Wraz ze spadkiem prestiżu geometrii wykreślnej we Francji około połowy XIX wieku zmalało także zainteresowanie wśród tamtejszych wytwórców m.in. modelami nitkowymi Oliviera. Tymczasem od lat 60. tego wieku stopniowo wzrastało zainteresowanie trójwymiarowymi modelami obiektów geometrycznych w ówczesnych państwach niemieckich[9]. Z jednej strony tendencja ta pokrywała się z dynamicznym wzrostem, w tym samym okresie, znaczących wyników uzyskiwanych przez tamtejszych matematyków[10]. Z drugiej, szczególnie po

---

[6] *Catalogue* 1882, s. 31; por. także: Sattelmacher 2016, ss. 137–138.

[7] Hervé 2007, ss. 295–318. Olivier budował także modele rozmaitych układów mechanicznych z przekładniami zębatymi.

[8] Lorraine J. Daston sugeruje wpływ empirystycznej filozofii Johna Locke'a na francuskich matematyków końca XVIII wieku. Dotyczyłoby to nie tylko źródeł empirycznych wiedzy matematycznej, ale także potrzeby sposobów jej prezentowania w postaci „empirycznych" wizualizacji w dydaktyce geometrii; zob.: Daston 1986, ss. 271––274; także: Friedman 2018, s. 116.

[9] Friedman 2018, s. 118.

[10] Zob. np.: Struik 1960, ss. 250, 299.

wojnie francusko-pruskiej i zjednoczeniu Niemiec, nastąpiło na ich obszarze znaczne ożywienie wytwórczości dydaktycznych przyrządów naukowych, w tym modeli, co pozwoliło na konkurowanie na tym polu z odpowiednikami francuskimi i angielskimi[11]. Wzrosło również zainteresowanie tymi modelami w dydaktyce uczelnianej w innych państwach, zwłaszcza w Stanach Zjednoczonych.

Tendencje do wykorzystywania modeli materialnych w dydaktyce matematyki, jak się okazuje, szły w parze z trendem budowy trójwymiarowych modeli obiektów, stanowiących przedmiot zainteresowania dziewiętnastowiecznej fizyki i chemii. W przypadku tej pierwszej na uwagę zasługują ruchome modele odkrywanych od lat 20. tego wieku zjawisk elektromagnetycznych. Ponieważ opis teoretyczno-matematyczny tych zjawisk, w szczególności w postaci ujęcia maxwellowskiego, daleko odbiegał od możliwości intuicyjnego wyobrażenia, m.in. sam James C. Maxwell (1831–1879), a także Oliver Lodge (1851–1940) i Ludwig Boltzmann (1844–1906) projektowali realizowane później w praktyce modele mechaniczne i hydrodynamiczne elektromagnetyzmu (Ryc. 5)[12]. Niewątpliwe dla tej praktyki były także przyświecające jej pobudki związane z rozpowszechnionym w tym okresie przekonaniem o konieczności „wtłoczenia” nowo odkrywanych zjawisk fizycznych w ramy tradycyjnych ujęć mechanicznych (tzw. mechanicyzm)[13].

Nieco inne przesłanki przyświecały twórcom trójwymiarowych modeli chemicznych w drugiej połowie XIX wieku. Należeli do nich pionierzy stereochemii, w tym Friedrich A. Kekulé (1829–1896), August W. von Hofmann (1818–1892) i Jacobus H. van ’t Hoff (1852–1911)[14]. Był to okres jakościowej zmiany: przechodzenia od chemii przemian i stosunków stechiometrycznych do chemii struktur przestrzennych

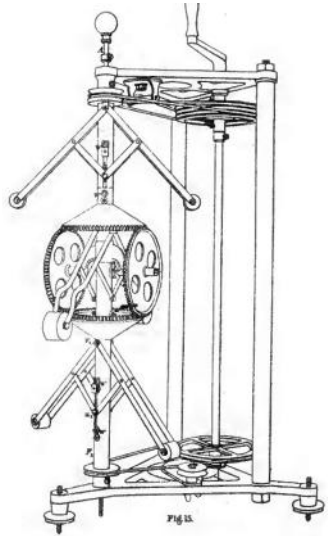
---

11 Brenni 2012, s. 202; Sattelmacher 2013, ss. 294–296.

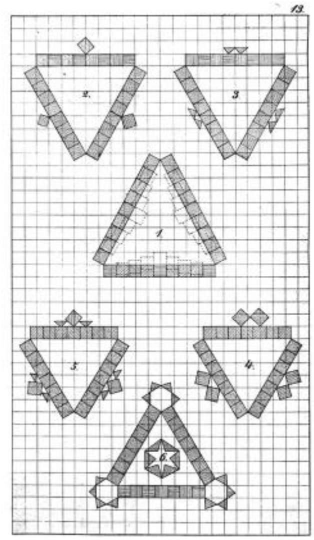
12 Brenni 2004.

13 Zob. np.: Harman 1982, ss. 149–155; Szumilewicz 1974, ss. 37–90. Jest czymś charakterystycznym, że wraz z powstaniem nowych rewolucyjnych teorii fizycznych na początku XX wieku (mechaniki kwantowej i mechaniki relatywistycznej) ograniczających zakres stosowalności tzw. mechaniki klasycznej, zarówno z obszaru wytwórczości, jak i dydaktyki stosunkowo szybko znikły modele mechaniczne elektromagnetyzmu.

14 Meinel 2004; 2009.

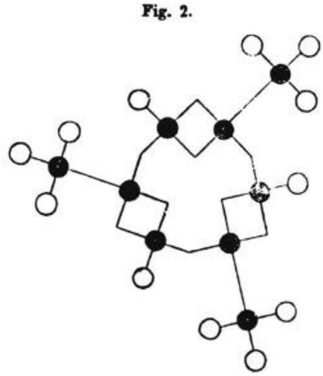


Ryc. 5. „Bicykel" Boltzmanna (1908, tabl. II, fig. 15)



Ryc. 6. Układy klocków według zaleceń F. Fröbela (1874, tabl. 13)

Fig. 2.



Ryc. 7. Struktura mezytylenu (1,3,5-trimetylobenzen, $C_6H_3(CH_3)_3$) według Kekulégo (1867, t. 10, ss. 216, fig. 2)

związków. Mimo kontrowersji i sporów, na trwałe do słownika tej dziedziny wiedzy wchodziły stopniowo pojęcia atomu, molekuły i wiązania chemicznego. Modele trójwymiarowe molekuł związków organicznych nie tylko odzwierciedlały przypuszczalny rozkład przestrzenny atomów, ale także pobudzały wyobraźnię, stanowiąc z czasem swoisty heurystyczny impuls do stawiania śmiałych hipotez, a nawet projektowania przemian chemicznych prowadzących do wytworzenia związków o zadanej uprzednio strukturze.

Na podstawie wymienionych skrótowo przykładów tendencji budowania modeli materialnych w dziewiętnastowiecznej matematyce, fizyce i chemii można wyciągnąć ostrożny wniosek, iż w znacznym stopniu były one następstwem, zwłaszcza w dwóch pierwszych obszarach wiedzy, powstania nowych koncepcji teoretycznych, charakteryzujących się wysokim stopniem abstrakcji, a jednocześnie oddaleniem od intuicji i poglądowości. Na gruncie matematyki wiązało się to m.in. z powstaniem w omawianym okresie geometrii nieeuklidesowych, abstrakcyjnych pojęć krzywizny i rozmaitości *n*-wymiarowej oraz tendencjami do uogólniania teorii matematycznych. W fizyce dalekim od poglądowości charakterem odznaczały się rozwijane w tym czasie m.in. teorie światła, ciepła czy elektromagnetyzmu. Potrzebę konkretyzacji i wizualizacji odczuwali nie tylko dydaktycy, ale – jak wskazują wymienione wyżej nazwiska – nawet wybitni uczeni, nierzadko twórcy wspomnianych teorii.

Niemiecki historyk chemii Christoph Meinel (1949–) uważa, iż istnieje głęboki kulturowy związek łączący ideę modeli struktur chemicznych Kekulégo (Ryc. 7) i van 't Hoffa ze stylem architektonicznym licznych dziewiętnastowiecznych budowli użytkowych (takich jak konstrukcje hal wystawowych lub dworców kolejowych) oraz ideą dziecięcych zabaw percepcyjno-manipulacyjnych drewnianymi klockami w formie figur geometrycznych (np. kuli, walca, sześcianu) w ramach pedagogiki przedszkolnej niemieckiego teoretyka edukacji Friedricha Fröbela (1782–1852) (Ryc. 6). Upraszczając, związek ten wyraża się w nowym, właściwym dla omawianego okresu, sposobie i zarazem umiejętności uczenia się, rozumienia, ale i kształtowania relacji przestrzennych. Obejmował on pozornie oddalone od siebie obszary aktywności społeczno-kulturowej[15].

Zbieżności konstrukcyjno-przestrzenne widoczne są również w procesie charakterystycznej migracji idei powierzchni prostokreślnych od trójwymiarowych modeli matematycznych do rozwiązań architektonicznych końca XIX wieku, jak również wieku XX. Tendencję tę można dostrzec choćby w licznych rozwiązaniach budowlanych takich

---

[15] Meinel 2004, ss. 266–269; 2009, ss. 14–17. Na temat idei pedagogicznych Fröbela zob. np.: Nawroczyński 1987, ss. 153–156. Fröbel był w znacznym stopniu inspirowany pracami szwajcarskiego pedagoga i teoretyka edukacji Johanna H. Pestalozziego (1746–1827), który za naczelną dyrektywę nauczania uznawał poglądowość (*Anschaulichkeit*).

Ryc. 8. Wieża ciśnień projektu Szuchowa (z 1896 r.) w Niżnym Nowgorodzie. © Fot. M.P. Dmitriev (1858–1948). Dostęp online (5.07.2018), domena publiczna

Ryc. 9. Rzeźba Nauma Gabo (z lat 1954––1957) przed domem towarowym w Rotterdamie. © Fot. F. Eveleens (praca własna). Rotterdam, Coolsingel. Kunstwerk „Gestileerde bloem" van Naum Gabo. Dostęp online (5.07.2018), CC-BY 3.0, zdesaturowany z oryginału

autorów jak Władimir G. Szuchow (1853–1939) zwany „rosyjskim Edisonem" (Ryc. 8), Antoni Gaudi (1852–1926) czy Le Corbusier (1887–1965)[16]. Jest interesujące, że modele nitkowe typu Oliviera, jak również późniejsze warianty modeli matematycznych proweniencji niemieckiej inspirowały także współczesnych przedstawicieli sztuki abstrakcyjnej, takich jak rzeźbiarze Naum Gabo (1890–1977) (Ryc. 9), Henry Moore (1898–1986) czy współczesny architekt-matematyk Artyom Maxim (Ryc. 10)[17]. Zdaje się to potwierdzać wspomnianą powyżej tezę Chri-

---

[16] Xavier, Pincho 2016, s. 362. Można sądzić, że zainteresowanie architektów powierzchniami minimalnymi wynikało nie tylko z ich własności „estetycznych", ale i z tego, że powierzchnie te są rozwiązaniami pewnych problemów wariacyjnych (np. zapewniają maksymalną wytrzymałość przy zadanych parametrach). Za zwrócenie uwagi na ten aspekt wyrazy wdzięczności należą się jednemu z Recenzentów.

[17] Vierling-Claassen 2010, ss. 11–18. Zob. także: Lodder, Hammer 2000; Hedgecoe, Moore 1968, s. 105.

Ryc. 10. Współczesna instalacja Artyoma Maxima inspirowana matematyczną powierzchnią minimalną. © Fot. G. Wrigley (praca własna). Customs House Library Exhibit. Dostęp online (30.08.2018), CC-BY 3.0, zdesaturowany z oryginału

stopha Meinela, a nawet sugerować konieczność objęcia nią szerszych obszarów kultury.

Powracając do wspomnianego zainteresowania trójwymiarowymi modelami matematycznymi w Niemczech w drugiej połowie XIX stulecia, nie można nie wspomnieć o roli, jaką w tym procesie historycznym odegrał przywołany już powyżej niemiecki matematyk Felix Klein, którego nazwisko wiąże się głównie z programem z Erlangen. Mniej znane są natomiast jego zainteresowania trójwymiarowymi modelami obiektów matematycznych, którymi skutecznie zaraził go Julius Plücker (1801–1868) w czasie studiów Kleina w bońskiej Polytechnische Schule. Plücker do końca życia sam budował modele z gipsu, drzewa, tektury i linek na wzór szkoły Monge'a. Dodatkowym impulsem były odkrywane w tym okresie nowe krzywe i powierzchnie geometrii algebraicznej oraz różniczkowej[18]. Od tej pory modele trójwymiarowe stały

[18] Friedman 2018, s. 118.

się istotnym elementem nie tylko nauczania i pracy badawczej Kleina, ale i jego przedsięwzięć na polu reorganizacji edukacji matematycznej w niemieckich uniwersytetach i szkołach średnich[19].

Swoje zainteresowanie modelami Klein kontynuował w czasie krótkiego pobytu jako wykładowca w Getyndze, następnie jako profesor w Erlangen i znowu w Bonn, gdzie wraz z Alexandrem Brillem (1842––1935) nie tylko zaprojektował setki nowych modeli, ale także sekundował dynamicznemu rozwojowi ich wytwórczości komercyjnej. W Bonn doktoranci Kleina i Brilla mieli obowiązek wraz z pracą doktorską przedłożyć także zbudowane przez siebie modele badanych obiektów matematycznych[20]. Dla obydwu niemieckich uczonych posługiwanie się modelami trójwymiarowymi miało na celu nie tylko rozwijanie wyobraźni i intuicji matematycznej, co potwierdzało wagę ich użycia w procesie poznawczym i edukacyjnym (funkcja reprezentująca, wyjaśniająca i dydaktyczna), ale także stymulowanie odkrywania nowych twierdzeń matematycznych (funkcja heurystyczna)[21]. Odwołując się do francuskiej tradycji budowy modeli przez Monge'a i Oliviera, Klein pisał:

> Podobnie jak dziś, także wtedy celem modeli nie było może skompensowanie słabości intuicji (*Anschauung*), co *rozwinięcie* [kursywa Kleina – J.R.] żywej, jasnej intuicji – celu, który najlepiej osiągnąć przez samodzielne ich wykonanie[22].

Jak się wydaje, kluczowym pojęciem w poglądach Kleina na temat statusu modeli trójwymiarowych, a nawet – szerzej – na temat statusu współczesnej mu geometrii, było wymienione wyżej pojęcie intuicji (*Anschauung*), albo inaczej – swoistej intuicyjnej wyobraźni matematycznej. W ujęciu niemieckiego matematyka element intuicji, w szczególności intuicji przestrzennej (*räumlicher Anschauung*), wykracza poza sferę abstrakcyjności idei geometrycznych wyrażoną w formalizmie, ale stanowi zarazem dopełnienie, zwłaszcza w jego rozumieniu i twórczym rozwijaniu[23].

---

[19] Schubring 2010, ss. 5–9.

[20] Friedman 2018, s. 121.

[21] Na temat wielości typów modeli naukowych i ich funkcji por. np.: Hajduk 1972.

[22] Klein 1926, s. 78.

[23] Eduard Glas (2000, ss. 80) wymienia dwa przykłady owocnej intuicji w pracach Kleina, pierwszy dotyczący wykorzystania algebraicznego pojęcia grupy do pro-

Niesprowadzalną jedynie do abstrakcyjnego formalizmu geometrię Klein nazywa „właściwą" i wspomina o niej, a także o roli w niej modeli, we własnym komentarzu do słynnego wykładu programowego wygłoszonego w Erlangen w 1872 roku:

> Istnieje geometria właściwa (*eigentliche Geometrie*), która, w przeciwieństwie do badań omówionych w tekście, nie chce być jedynie formą uzmysłowioną (*veranschaulichte Form*) badań bardziej abstrakcyjnych. W takiej geometrii figury przestrzenne są pojmowane w całej ich rzeczywistości postaciowej (*gestaltlichen Wirklichkeit*) i – co właśnie stanowi stronę matematyczną – związki do nich się odnoszące są pojmowane jako wyniki widoczne twierdzeń zasadniczych poglądu przestrzennego (*räumlicher Anschauung*). Model wykonany, spostrzegany (*angeschaut*) lub tylko żywo wyobrażany, jest dla tej geometrii nie środkiem do osiągnięcia pewnego celu, lecz samą rzeczą (*die Sache selbst*)[24].

Odnosząc się do powyższego cytatu, niemiecki historyk matematyki Herbert Mehrtens (1946–) zwraca uwagę nie tylko na istotne dla Kleina pojęcie „intuicji przestrzennej", ale także pojęcie „rzeczywistości postaciowej" (*gestaltlichen Wirklichkeit*) lub „postaci/kształtu" (*Gestalt*). Zdaniem Mehrtensa stanowi ona rodzaj istoty danego obiektu geometrycznego, którą matematyk może wyrazić tylko za pomocą notacji symbolicznej, diagramów graficznych lub modeli trójwymiarowych. Te ostatnie są dla „rzeczywistości postaciowej" różnymi reprezentacjami. W tym sensie naoczny model nie jest jakimś ograniczonym dodatkiem w działalności matematycznej, lecz jej integralnym elementem

---

gramu klasyfikacji systemów geometrycznych i drugi dotyczący rozwikłania problemu rozwiązywalności równań algebraicznych piątego stopnia przez rozważenie grupy symetrii dwudziestościanu foremnego.

[24] Klein 1895, s. 56. Praca ta została przełożona przez Samuela Dicksteina (1851–1939), a przez autorów niniejszego artykułu częściowo przystosowana do wymogów aktualnego polskiego słownictwa. Wyrażenie *räumlicher Anschauung* Dickstein przetłumaczył jako „pogląd przestrzenny", co można lepiej oddać, w duchu Kleina, jako „intuicja przestrzenna". Schubring zauważa, że pojęcie *Anschauung*, często niezbyt poprawnie przekładane na różne języki, od czasów Immanuela Kanta (1724–1804) stanowi również kluczowe pojęcie w filozofii niemieckiej; zob.: Schubring 2016, ss. x–xi.

ucieleśniającym, w tym wizualizującym, postać (*Gestalt*) danego obiektu matematycznego[25].

Kres produkcji, a także szerszego zainteresowania trójwymiarowymi modelami matematycznymi nadszedł w pierwszych dwóch dekadach XX wieku wraz z wybuchem I wojny światowej. Michael Friedman uważa, że jedną z pozamatematycznych przyczyn tego procesu była także – paradoksalnie – nadmierna komercjalizacja produkcji oraz nadpodaż modeli, przeważająca nad ich znaczeniem poznawczym. Autor ten dodaje, że z przyczyn ściśle związanych z matematyką należy wymienić również odkrycie pod koniec XIX wieku, dalekich od kleinowskiego pojęcia *Anschauung*, funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych – tzw. analitycznych monstrów. Jednak najcięższy cios tradycji budowy modeli materialnych w matematyce, jak się wydaje, zadał formalistyczny program aksjomatyzacji matematyki Davida Hilberta (1862–1943), notabene kolegi Felixa Kleina z Getyngi[26]. A potem nastał we Francji okres działalności sławnej skądinąd grupy matematycznej Nicolasa Bourbakiego, o której amerykański fizyk i noblista David Gross pisze, że

> wywarła katastrofalny (*disastrous*) wpływ na styl publikacji matematycznych, których autorzy byli wręcz zobowiązani, by usuwać wszelkie ślady intuicji, jak również by nie ujawniać drogi dojścia do wyniku – nie mówiąc już o poglądowej wizualizacji, którą „oficjalnie" traktowano jako rzecz niemal wstydliwą i niegodną matematyka[27].

Nie oznaczało to jednak zupełnego zaniku tych tendencji w matematyce XX wieku, które nadal dostrzegały w intuicji przestrzennej istotną siłę napędową dla twórczości i odkryć[28].

---

[25] Mehrtens 2004, ss. 289–290.

[26] Friedman 2018, s. 124; Mehrtens 2004, s. 290.

[27] Gross 1988. Oczywiście, nikt i nigdy formalnie nie „zobowiązywał" do usuwania wszelkich śladów intuicji. Jeżeli istniało jakieś „zobowiązanie", to raczej w charakterze przestrogi, by nie ufać zbytnio intuicji i starać się – w celu uniknięcia ewentualnego błędu – maksymalnie formalizować rozumowanie. Jest to np. ważne przy przejściu ze skończonego wymiaru do wymiaru nieskończonego, gdzie skończenie wymiarowe intuicje często zawodzą (za uwagę tę K.M. dziękuje Recenzentowi).

[28] Można tu wspomnieć choćby nurt w matematyce i filozofii matematyki zwany intuicjonizmem z jego twórcą Luitzenem E.J. Brouwerem (1881–1966) na czele.

4. Modele matematyczne w zbiorach Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego

W historycznych zasobach Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie zachowało się kilka cennych modeli matematycznych z początku XX wieku[29]. Warto przy okazji ich omawiania przypomnieć o wcześniejszych pomocach w nauce matematyki na krakowskim uniwersytecie.

Nauczanie matematyki na uczelni sięga swymi korzeniami początków powstania Studium Generale, tj. II połowy XIV wieku. Szybki rozwój tej dyscypliny datuje się na rok 1402, kiedy to mieszczanin krakowski Jan Strobner ufundował katedrę astronomii i matematyki. Jedną z najstarszych pomocy dydaktycznych w przyswajaniu wiedzy z geometrii stanowiły na uniwersytecie w Krakowie figury matematyczne w formie fresków naściennych. Ich unikatowe relikty z XVII wieku zachowały się do dziś w jednym z lektoriów najstarszego budynku Uniwersytetu Jagiellońskiego, w Collegium Maius (Ryc. 11).

Pomocą w wizualizacji pojęć geometrycznych były również ryciny zamieszczane w podręcznikach i wydawnictwach encyklopedycznych XVIII wieku. Były to pomoce „dwuwymiarowe". Przestrzenne modele pojawiły się nie wcześniej niż w XIX wieku, szczególnie na potrzeby obrazowania krzywych i płaszczyzn, wykorzystywanych praktycznie w rozwijających się wówczas naukach inżynieryjnych i w technice[30].

Wytwórczość trójwymiarowych modeli matematycznych rozwinęła się w latach 1870. w Niemczech. Jedną z pierwszych wytwórni była firma Ludwiga Brilla, wydawcy, którego firma funkcjonowała od 1877 r. w Darmstadt[31]. W tym czasie, od 1875 r., matematycy Alexander von Brill i Feliks Klein prowadzili rozszerzone kursy matematyki dla

---

[29] Zbiór modeli matematycznych i przyrządów liczących w Muzeum UJ jest obecnie w trakcie opracowywania. Do najcenniejszych obiektów, oprócz omawianych w artykule, należą XVII-wieczne kostki według J. Napiera oraz XIX-wieczny arytmometr według Thomasa de Colmara. Niestety, Uniwersytet Jagielloński nie posiada jednego z ważnych dla historii polskiej nauki przyrządu – integratora według Brunona Abdanka-Abakanowicza.

[30] Friedman 2018; Polo-Blanco 2007.

[31] Polo-Blanco 2011, s. 33; 2007; Kidwell 1996, ss. 197–208; Schilling 1903. Ludwig Brill wydał dwa katalogi modeli matematycznych pod tym samym tytułem: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung*, Darmstadt, datowane odpowiednio 1881 i 1892.

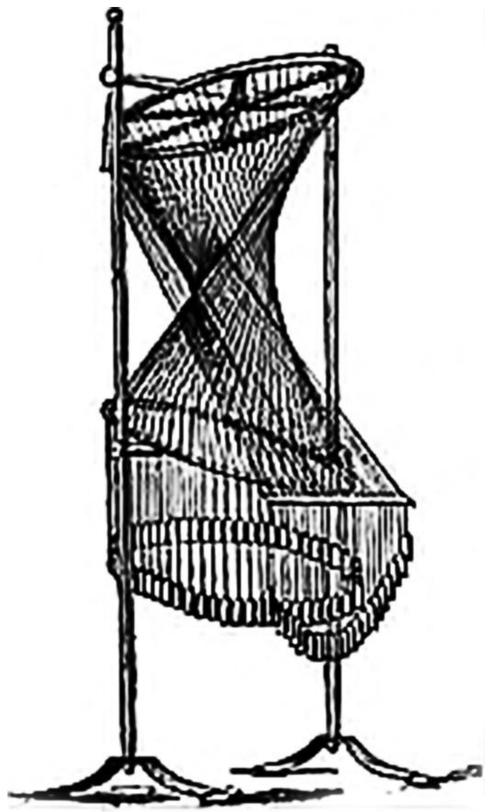
 DOI: 10.4467/2543702XSHS.19.009.11015

Ryc. 11. Relikty oryginalnych fresków matematycznych wraz ze współczesnymi uzupełnieniami w lektorium Collegium Maius, Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego, fot. G. Zygier

szczególnie uzdolnionych studentów w Szkole Politechnicznej (Technische Hochschule) w Monachium. Feliks Klein, propagator używania modeli w dydaktyce, projektował, podobnie jak Alexander Brill, modele dla firmy Ludwiga Brilla. W prace te angażowali oni również studentów[32]. Wśród nich był m.in. inny przyszły autor modeli przestrzennych dr Walther Dyck (1856–1934), późniejszy rektor Technische Hochschule w Monachium[33].

[32] Polo-Blanco 2007, ss. 3–5; Friedman 2018, s. 120. O wytwórcach modeli w USA patrz Kidwell 1996, ss. 197–208.

[33] Polo-Blanco 2007; Hashagen 2003.



Ryc. 12. Model strunowy oferowany przez Walthera Dycka w 1892 r.[34]

W II połowie XIX wieku wykonywano trzy typy przestrzennych modeli matematycznych. Najliczniejszą grupę stanowiły modele statyczne, wykonywane zwykle z gipsu, drewna lub kartonu. Drugi typ to ruchome modele nitkowe (strunowe). Na odpowiednio wyprofilowanych elementach metalowych, ruchomych w ustalonych płaszczyznach, naciągnięte były barwne nici, przecięcia których obrazowały odpowiednio krzywe lub płaszczyzny matematyczne (Ryc. 12 i 13).

Typ trzeci to również modele ruchome, określane w katalogach wytwórców jako kinematyczne[35]. Ich konstrukcja oparta była na układzie

---

[34] Dyck 1892, s. 256.

[35] Shell-Gellasch 2015.

Ryc. 13. Model strunowy, wyk. C.M. Clinton, Ithaca, NY, USA, pocz. XX wieku, wł. Muzeum UJ, fot. G. Zygier

dźwigni i kół zębatych. Ilustrowały w sposób mechaniczny powstawanie krzywych, zamianę ruchu obrotowego na posuwisty, liniowy. Ten typ modeli został zaprojektowany przez Fredericka Schillinga (1868–1950) ok. 1898 r., wówczas profesora matematyki na Uniwersytecie w Getyndze (1899–1904), a jednocześnie doradcy naukowego firmy swego brata, Martina Schillinga w Halle[36]. W 1903 r. był dyrektorem zbioru modeli matematycznych na Uniwersytecie w Getyndze. Od 1904 r. związany był z Technische Hochschule Danzig (obecnie Politechnika Gdańska), gdzie w latach 1917–1919 pełnił funkcję rektora (Ryc. 14).

[36] Schilling 1903, *Przedmowa* M. Schillinga z 1902 r.

Ryc. 14. Frederick Schilling. Źródło: *Beiträge und Dokumente zur Geschichte der Technischen Hochschule Danzig: 1904–1945. Zum 75. Gründungstag* (1979)

Do dnia dzisiejszego modele kinematyczne według F. Schillinga zachowały się jedynie w nielicznych kolekcjach muzealnych i uniwersyteckich.

5. Modele kinematyczne Martina Schillinga

Choć modele matematyczne z elementami ruchomymi oferowane były przez kilku innych wytwórców, to największą popularność, szczególnie w szkołach niemieckich, zyskały modele firmy M. Schilling.

W lipcu 1899 r. Martin Schilling przejął firmę Ludwiga Brilla, przeniósł jej siedzibę z Darmstadt do Halle, a około 1903 r. ponownie zmienił miejsce firmy na Lipsk[37]. Do 1904 r. firma M. Schilling oferowała 32 serie modeli. W katalogu z 1911 r. znajdujemy już 41 serii zawierających łącznie 377 modeli[38]. Firma funkcjonowała do 1935 r. i była naj-

[37] Palladino N. 1999–2000; Schilling 1903, *Przedmowa* M. Schillinga z 1902 r.; Shell-Gellasch 2015, ss. 67–179.

[38] Schilling 1911; Polo-Blanco 2011.

bardziej znaczącą, jeśli chodzi o wytwórczość modeli matematycznych. Prezentowała swe modele m.in. na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w 1904 r. w Heidelbergu, podczas którego F. Schilling wygłosił wykład poświęcony modelom kinematycznym[39].

M. Schilling wykonywał dwie serie modeli kinematycznych. Seria wcześniejsza oferowana była po raz pierwszy w roku 1903, oznaczona w katalogu jako seria XXIV, z podziałem na cztery grupy[40]. Modele nr 1–4, ujęte w grupie I, ilustrowały powstawanie krzywych cyklicznych kreślonych przez okrąg toczący się po zewnętrznej, lub wewnętrznej, powierzchni drugiego okręgu[41]. Kreślone w ten sposób krzywe należą do rodziny trochoid. Trzy modele grupy II, o numerach 5–7, służyły do kreślenia odpowiednio elips, ewolwent i cykloid. Modele nr 8 i 9 (grupa III) demonstrowały zamianę ruchu obrotowego odpowiednio na ruch liniowy (posuwisty) i zwrotny (model 8), i zasadę mechanizmu Watta (model 9)[42]. W grupie IV wydzielone zostały trzy modele typu inwersor, których rozróżnienie w katalogu wskazane jest poprzez nazwiska ich autorów: „nr 10. Inversor von Peaucellier, nr 11. Inversor von Hart, nr 12. Inversor von Sylvester-Kempe"[43]. Modele typu inwersor ilustrowały również zagadnienie mechanicznej zamiany ruchu z wykorzystaniem mechanizmów dźwigni i przekładni[44].

W katalogu z 1911 r. znajdujemy, obok serii XXIV, drugi zespół modeli kinematycznych liczący 11 typów, oznaczony jako seria XXXI i opisany: „Zweite Sammlung kinematischer Modelle, insbesondere zur Verzahnungstheorie, herausgegeben von Dr. Fr. Schilling, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in Danzig"[45]. Pięć modeli z tej serii znajduje się w Muzeum Boerhaave w Lejdzie[46].

---

[39] Disteli 1904, ss. 724–728, 734; tamże lista wytwórców modeli matematycznych.

[40] Schilling 1899, ss. 214–227; Schilling 1903.

[41] W technice taki ruch ma miejsce np. w łożysku rolkowym.

[42] Shell-Gellasch 2015, ss. 167–179.

[43] Schilling 1903.

[44] Matematyczny opis modeli: Schilling 1903, s. 56; Shell-Gellasch 2015.

[45] Schilling 1911. Frederick Schilling pracował w Königliche Hochschule w Gdańsku od 1904 r., w latach 1917–1919 pełnił funkcję rektora.

[46] Są to modele oznaczone w Katalogu Schillinga: Seria XXXI numerami: 3, 5, 6, 7, 8. Numery inwentarzowe Rijksmuseum Boerhaave: V16942, V16946/, V16949/, V16942/, V16940.

Opracowane przez Fredericka Schillinga, a oferowane przez firmę M. Schilling modele posiadały charakterystyczną, rozpoznawalną do dziś konstrukcję. Mechanizm główny osadzony był w kasecie zamkniętej od góry płytą szklaną. Poszczególne elementy modelu poruszano poprzez obrót korbki osadzonej pod podstawą. Wszystkie modele tego typu posiadały ten sam rozmiar kasety, w której zostały osadzone: 22 × 27 cm. Na podstawie drukowany był katalogowy numer serii, numer modelu oraz krótki opis matematyczny. Firma oferowała je do około 1935 r. Dziś, zastąpione nowoczesnymi technikami wizualizacyjnymi, stanowią one artefakty muzealne i są obiektem badań historyków nauki.

6. Kolekcje modeli matematycznych na świecie

Jako że Ludwig Brill, a później Martin Schilling byli głównymi wykonawcami modeli matematycznych w Niemczech, ich kolekcje zachowały się stosunkowo licznie w zbiorach muzealnych i uniwersyteckich.

Irene Polo-Blanco wymienia trzy kolekcje niderlandzkie: sto osiemdziesiąt modeli Brilla i Schillinga zachowane w Uniwersytecie w Amsterdamie, około stu modeli należących do Uniwersytetu w Lejdzie, dwadzieścia modeli przechowywanych w Uniwersytecie w Utrechcie. Szczegółowo omawia ona kolekcję około stu pięćdziesięciu modeli zachowanych w Uniwersytecie w Groningen[47]. Szerszy ogląd zachowanych zbiorów matematycznych wraz z literaturą tematu przedstawia Stefan Neuwirth[48] oraz Angela Vierling-Claassen[49]. Listę instytucji posiadających kolekcje zamieszczają również autorzy projektu Touch-Geometry Project[50]. Nicla Palladino omawia zbiory włoskich muzeów i szkół wyższych[51].

We Francji zbiory modeli matematycznych znajdują się w Conservatoire des Arts et Metiers (modele strunowe, ok. 1830 r.) oraz w Poincaré Institute w Paryżu, gdzie przechowywany jest zespół około czterystu

[47] Polo-Blanco 2007, ss. 9–21; 2011, s. 35. Irene Polo-Blanco i Lotte van der Zalm (2018) zamieszczają inwentarz zachowanych w Uniwersytecie w Groningen modeli różnych wytwórców, w tym M. Schillinga.

[48] Neuwirth 2014.

[49] Vierling-Claassen 2018.

[50] Karazin 2018.

[51] Palladino N. 1999–2000; Palladino N., Palladino F. 2001, ss. 781–790.

 DOI: 10.4467/2543702XSHS.19.009.11015

Ryc. 15. Model nr 3 serii XXXI, nr 331 Smithsonian Institution, negative number DOR2013-50214[52]

modeli[53]. Do liczących się zbiorów niemieckich należą m.in. kolekcje Eberhard Karls Universität w Tübingen, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Technische Universität Dresden, Universität Regensburg. Inne europejskie kolekcje to włoskie zbiory w Università degli Studi di Torino, Università degli Studi di Napoli Federico II oraz zbiory matematyczne uniwersytetów w Pawii i Mediolanie. Wiedeńska kolekcja Uniwersytetu Technicznego liczy około dwustu modeli. W Science Museum w Londynie przechowywany jest zespół modeli strunowych wykonanych przez Fabre de Lagrange'a w Paryżu[54]. W London Mathematical Society znajdują się modele autorstwa Juliusa Plückera (1801––1868)[55], którego uczniami byli Feliks Klein i Walther Dyck. Zbiory matematyczne posiadają również uniwersytety w Coimbrze, Lizbonie,

[52] Shell-Gellasch 2014. Dostęp online (15.09.2018).
[53] Instytut Henri Poincarégo 2018.
[54] Science Museum w Londynie 2018.
[55] Londyńskie Towarzystwo Matematyczne 2018.

Saragossie, Charkowie[56]. W Stanach Zjednoczonych znajdujemy zachowane modele z wytwórni Brilla i Schillinga, ale także wykonane przez lokalnych wytwórców. W literaturze wymieniane są kolekcje w Harvard University w Cambridge, Masssachusetts (modele gipsowe Brill/Schilling)[57], MIT Cambridge (modele gipsowe Brill/Schilling), w University of Illinois w Urbana-Champagne (w Altgeld Hall), Fairfield University w Connecticut, University of Arizona (modele Richarda Bakera (1886–1937)). Jednym ze znaczących jest zbiór modeli należących do Smithsonian Institution i przechowywanych w The National Museum of American History[58].

Ryc. 16. Model nr 10 typu inwersor von Peaucelliera, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg[59]

Modele kinematyczne w powyższych zbiorach stanowią rzadkość. Wydaje się, że żadna z kolekcji nie posiada kompletu liczącego dwanaście modeli kinematycznych grupy XXIV, a także wszystkich z grupy XXXI, oferowanych przez Martina Schillinga. Najliczniejszy ich

56 Vierling-Claasen 2018; Mathematics & Computer Science Library. The Hebrew University of Jerusalem 2018.

57 Vierling-Claassen 2007.

58 *Ibidem*.

59 Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 2018. Dostęp online (2.09.2018).

zbiór znajduje się w National Museum of American History[60] (Ryc. 15). Muzeum to posiada dziesięć modeli serii XXIV, z wyjątkiem dwóch, o numerach 2 i 5.

Pojedyncze modele kinematyczne znajdują się m.in. w Harvard University, University of Groningen (model nr 7)[61], Utrecht University (modele serii XXIV nr 9, 10, 11, 12)[62], w Instytucie Matematyki Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (trzy modele typu inwersor nr 10, 11, 12), w University of Illinois w Urbana-Champaign (modele nr 1, 3, 10, 11, 12)[63].

Trzy modele kinematyczne Schillinga w zbiorach Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie uzupełniają powyższą listę.

7. Modele kinematyczne Schillinga w Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego

Zachowane w Krakowie modele to urządzenia z grupy II serii XXIV, ilustrujące mechaniczny sposób kreślenia krzywych matematycznych. Są to modele o numerach 5, 6 oraz 7.

Model nr 5 ilustruje konstrukcję figur kreślonych przez punkty umieszczone na średnicy, i jej przedłużeniu, koła mniejszego, które porusza się wewnątrz koła o średnicy dwukrotnie większej od koła mniejszego. Odpowiednie punkty kreślą elipsy. Punkty umieszczone na końcach promienia koła mniejszego tworzą podczas jego obrotu proste prostopadłe. Model ten, oprócz tworzenia elipsy, ilustruje zamianę ruchu obrotowego na ruch posuwisty (Ryc. 17a).

Model nr 6 obrazuje powstawanie ewolwenty koła, którą kreśli punkt (punkty) umieszczony (umieszczone) na prostej i na końcach odcinka prostopadłego do prostej poruszającej się po obwodzie koła (Ryc. 17b).

Model nr 7 obrazuje sposób powstawania cykloidy – krzywej, jaką zakreśla punkt leżący na obwodzie koła, które toczy się po prostej. Model obrazuje powstawanie trzech typów cykloid w zależności od

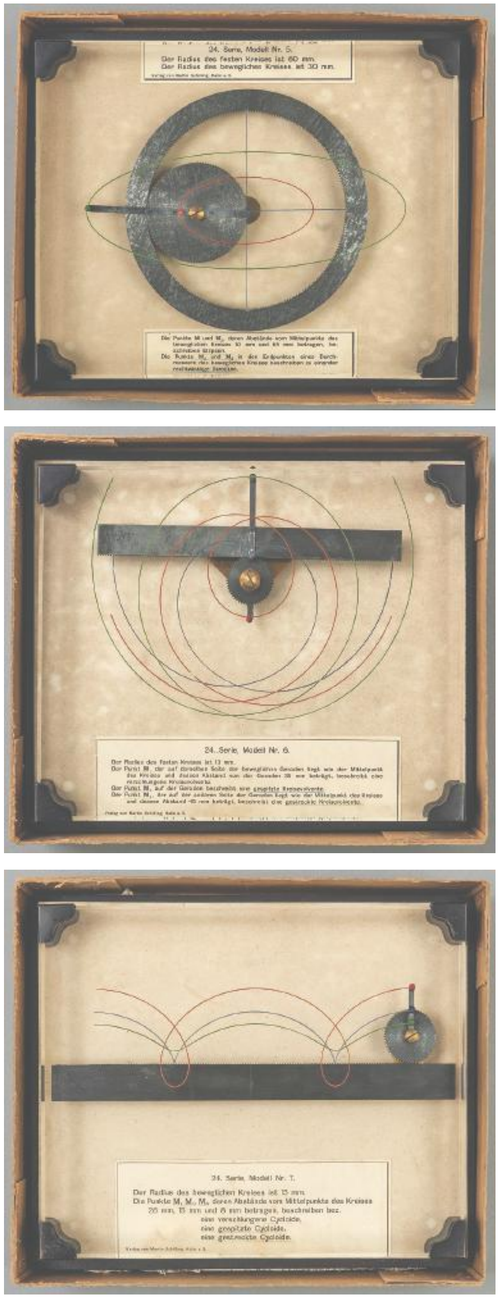
---

[60] Shell-Gellasch 2015; Kidwell 1996, ss. 197–208; Smithsonian Institution 2018 (szczegółowy opis dziesięciu modeli wraz z literaturą).

[61] Polo-Blanco, van der Zalm 2018.

[62] Uniwersytet w Utrechcie 2018.

[63] Uniwersytet Stanu Illinois 2018.



Ryc. 17 a–c. Modele kinematyczne M. Schillinga, seria XXIV, nr 5, 6 oraz 7, wł. Muzeum UJ, fot. G. Zygier położenia punktów, które kreślą krzywe: cykloidę zwykłą, wydłużoną i skróconą[64] (Ryc. 17c).

Wyjaśnienia wymaga proweniencja tych przyrządów. Z dużym prawdopodobieństwem datować je można na rok 1902[65]. W tym okresie I Katedrą Matematyki na Uniwersytecie Jagiellońskim kierował Kazimierz Żorawski (1866–1953), powołany na to stanowisko w 1895 r.[66] Był on również kierownikiem Wyższego Seminarium Matematycznego[67], które funkcjonowało przy Wydziale Filozoficznym już od lat siedemdziesiątych XIX wieku[68]. Wiadomo, że prowadził wykłady m.in. z tematyki: geometria elementarna, krzywe i powierzchnie[69]. Wiadomo również, że mocą reskryptów c.k. Ministerstwa Wyznań i Oświecenia przyznawane mu były regularne dotacje na zakup książek i modeli dla Seminarium Matematycznego. W 1899 r. K. Żorawski otrzymał z kasy Ministerstwa kwotę „dwustu złotych na zakupno najważniejszych modeli i książek dla rzeczonego seminaryum"[70]. W roku 1902 dotacja ta wyniosła 400 zł. Można sądzić, że właśnie z jej części zakupione zostały badane modele[71]. Wykłady Seminarium Matematycznego odbywały się w sali nr XXXI budynku Collegium Novum przy ul. Gołębiej 20 (obecnie nr 24). Tam też znajdowały się dwie szafy całkowicie zapełnione „zbiorami seminaryjnymi"[72] (rok 1899).

Nie udało się dotychczas odnaleźć spisu modeli należących do Seminarium Matematycznego. Dalsze poszukiwania być może pozwolą

[64] Punkt na końcu promienia koła kreśli cykloidę zwykłą, punkt na przedłużeniu promienia kreśli cykloidę wydłużoną, punkt położony na promieniu wewnątrz koła kreśli cykloidę skróconą.

[65] W pudełku jednego z modeli znajduje się fragment gazety *Göttinger Zeitung* z 22 XI 1902 r.

[66] W latach 1917–1919 był rektorem Uniwersytetu Jagiellońskiego. Dalsza jego kariera naukowa związana była ze środowiskiem uczonych warszawskich.

[67] AUJ, sygn. WF II 163 Katedry i Instytut Matematyczny 1851–1945, k. 38 i inne.

[68] Materiały dotyczące funkcjonowania Seminarium Matematycznego zawarte są w zespołach pod sygnaturami: AUJ sygn. SII 865 Wydział Filozoficzny. Matematyka oraz AUJ sygn. WF II163 Katedry i Instytut Matematyczny 1851–1945. Zachowane materiały dotyczą spraw finansowych i organizacyjnych Seminarium.

[69] Ciesielska, Domoradzki 2014, s. 64.

[70] AUJ, sygn. WFII 163, k. 38, pismo do c.k. filialnej Kasy w Krakowie z dnia 21 VI 1899; AUJ SII 865 pismo: SEN Ak. L1026. „Odpis do akt" z dnia 30 VI 1899.

[71] Cena zakupu za trzy modele podana w katalogu wynosiła 183 marki.

[72] AUJ sygn. SII 865, pismo K. Żorawskiego z dnia 25 XI 1899 r.

wyjaśnić, ile przyrządów zakupiono w firmie M. Schilling i jakie były dalsze ich losy. W roku 1923 Ministerstwo Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego, na wniosek Wydziału Filozoficznego UJ, wydało zgodę na utworzenie Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego złożonego z zespołu „seminariów matematycznych łącznie z biblioteką seminaryjną i zbiorem modeli”[73]. Zapewne z tego zbioru pochodzą zachowane modele Schillinga.

Warto wspomnieć o wcześniejszym gabinecie modeli matematycznych, który istniał na Uniwersytecie Jagiellońskim już w roku 1834. Z tego roku zachował się „Inwentarz Modeli dla Katedry Matematyki Elementarnej sprawiony”. Spis początkowo liczył 16 pozycji i obejmował 28 modeli drewnianych i mosiężnych, wykonanych przez lokalnych rzemieślników[74]. Dwa lata później gabinet wzbogacił się o kolejne 15 modeli, a w 1841 r. stwierdzono ich kradzież. Data ich zniknięcia nie została dokładnie określona, co pozwala sądzić, iż nie były zbyt często wykorzystywane. Szybko ujęto sprawcę, odzyskano i naprawiono uszkodzone modele[75]. W roku 1851 podjęta została decyzja o likwidacji gabinetu i przekazaniu modeli do gimnazjum św. Anny[76]. Powodem likwidacji zbiorów był brak pomieszczenia na ich przechowywanie, co również sugeruje, iż nie były specjalnie pomocne w edukacji. Ówczesny profesor matematyki Jan Kanty Steczkowski (1800–1881) zdecydował o zatrzymaniu dla własnego użytku kilku modeli, w tym

> 1. Hiperboloid kołowy obrotowy, 2. Hiperboloid kołowy nieobrotowy, 3. Konoid i hiperboloid obrotowy na jednym modelu, wszystkie 3-nitkowe z obrączkami i słupkami mosiężnymi, każdy umieszczony w oddzielnym pudełku tekturowym […][77].

---

[73] AUJ sygn. WFII 163, pismo Departamentu Nauki i Szkół Wyższych Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego z dnia 31 VIII 1923 r.; tu również projekt Regulaminu Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego.

[74] AUJ, sygn. WFII 163, „Inwentarz Modeli dla Katedry Matematyki Elementarnej sprawiony”, karty bez numeracji.

[75] Ich naprawę wykonał Jacenty Taborski, mechanik uniwersytecki w latach 1825–1857, zm. 1862 – zob. Gablankowski 2004, s. 42.

[76] Na własność Gabinetu Mineralogicznego przekazano wówczas 159 modeli krystalograficznych: AUJ WFII 163, notatka z dnia 14 XI 1870 r.

[77] AUJ sygn. WFII 163, notatka z dnia 14 XI 1863 r. na okoliczność zwrotu tych modeli przez prof. Jana Kantego Steczkowskiego.

Modele te nie zachowały się, podobnie jak i inne wymienione w spisie.

Podsumowując, spośród trzech modeli kinematycznych Schillinga znajdujących się w Muzeum Uniwersytetu Jagiellońskiego, model nr 5 być może jest jedynym, zachowanym w zbiorach polskich muzeów. W Muzeum Uniwersytetu Wrocławskiego zachowały się modele kinematyczne serii XXIV o numerach 2, 3, 4, 6. Wraz z opisywanymi ze zbiorów krakowskich reprezentują łącznie 6 rodzajów modeli z tej serii.

Nie jest wiadomo, czy zakupiona została przez Uniwersytet Jagielloński cała seria XXIV modeli lub modele z innych serii.

Bez wątpienia można uznać, że w środowisku profesorów matematyki prowadzących Seminarium Matematyczne istniała świadomość i potrzeba posiadania pomocy dydaktycznych, jakimi były modele geometryczne. By ocenić, czy i jak szeroko używano ich w praktyce dydaktycznej, konieczne jest badanie nieco innego charakteru źródeł niż wykorzystane w niniejszym artykule.

8. Podziękowania

Jeden z autorów artykułu (E.W.) składa niniejszym serdeczne podziękowania Pani Anne Por z Rijksmuseum Boerhaave w Lejdzie oraz Pani dr Danucie Ciesielskiej z Instytutu Historii Nauki PAN za udzieloną mi pomoc i cenne informacje merytoryczne, które wykorzystałam przy pracy nad artykułem.

Bibliografia

ŹRÓDŁA ARCHIWALNE

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Sygn. WFII 163 Katedry i Instytut Matematyczny 1851–1945.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). „Inwentarz Modeli dla Katedry Matematyki Elementarnej sprawiony", 1863/4, karty bez numeracji.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Pismo Departamentu Nauki i Szkół Wyższych Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego z dnia 31 VIII 1923 r.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Pismo do c.k. filialnej Kasy w Krakowie z dnia 21 VI 1899 r.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Pismo K. Żorawskiego z dnia 25 XI 1899 r.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Projekt Regulaminu Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego, bez daty.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). SEN Ak. L1026. „Odpis do akt" z dnia 30 VI 1899 r.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Sygn. S II 865 Wydział Filozoficzny. Matematyka.

Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego (AUJ). Notatka na okoliczność zwrotu tych modeli przez prof. Jana Kantego Steczkowskiego z dnia 14 XI 1863 r.

ŹRÓDŁA DRUKOWANE

Boltzmann, Ludvig 1908: *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes.* Część 1. Leipzig (wydanie drugie): Johann Ambrosius Barth.

Boltzmann, Ludvig 1882: *Catalogue des Collections du Conservatoire National des Arts et Métiers*, zredagowany przez wydawcę. Paris: Dunod Éditeur.

Disteli, Martin 1904: *Die Literatur- und Modellausstellung des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904*. Dostęp online (10.09.2018): http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12595/1/modell_1904.pdf.

Dyck, Walther 1892: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, München 1892. Dostęp online (30.09.2018): https://archive.org/details/katalogmathemat00goog.

Fröbel, Friedrich 1874: *Die Pädagogik des Kindergartens: Gedanken Friedrich Fröbel's über das Spiel und die Spielgegenstände des Kindes. Friedrich Fröbel's gesammelte pädagogische Schriften.* Część 2. Pod redakcją Wicharda Langego, Berlin (wydanie drugie): Verlag Th.Ch.F. Enslin.

Kekulé, August 1867: Ueber Constitution des Mesitylens. *Zeitschrift für Chemie* 10, ss. 214–218.

Klein, Felix 1926: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Berlin: J. Springer.

Klein, Felix 1895: Rozważania porównawcze o nowszych badaniach geometrycznych (przekład Samuel Dickstein). *Prace Matematyczno-Fizyczne* 7, ss. 27–61.

Schilling, Frederick 1899: Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 4, ss. 214–227.

Schilling, Martin 1903: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung.* Halle a. S.: M. Schilling.

Schilling, Martin 1911: *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht veröffentlicht durch die Verlagshandlung.* Leipzig: M. Schilling.

OPRACOWANIA

Arnold, Władimir I. 2001: O nauczaniu matematyki (przekład Danuta Śledziewska-Błocka). *Wiadomości Matematyczne* 37, ss. 17–26.

Brenni, Paolo 2004: Mechanical and Hydraulic Models for Illustrating Electromagnetic Phenomena. *Nuncius* 19, ss. 629–657. DOI: 10.1163/182539104X00386.

Brenni, Paolo 2012: The Evolution of Teaching Instruments and Their Use Between 1800 and 1930. *Science & Education* 21, ss. 191–226. DOI: 10.1007/s11191-010-9326-z.

Ciesielska, Danuta; Domoradzki, Stanisław 2014: On Mathematical Lectures at the Jagiellonian University in the Years 1860–1918. Essay Based on Manuscripts. *Czasopismo Techniczne Nauki Podstawowe* 7, ss. 59–71. DOI: 10.4467/2353737XCT.14.058.2508.

Daston, Lorraine J. 1986: The Physicalist Tradition in Early Nineteenth Century French Geometry. *Studies in History and Philosophy of Science* 17, ss. 269–295. DOI: 10.1016/0039-3681(86)90010-5.

Dunham, William 1994: *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems, and Personalities*. New York: Wiley & Sons. ISBN 978-0471176619.

Friedman, Michael 2018: *A History of Folding in Mathematics: Mathematizing the Margins*. Cham: Birkhäuser. ISBN 978-3-319-72487-4.

Gablankowski, Maciej 2004: *Mechanicy Uniwersytetu Jagiellońskiego (1787–1939)*, Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego, praca magisterska pod kierunkiem prof. dr hab. Andrzeja Banacha. Kraków: Zakład Historii Kultury i Oświaty, Instytut Historii Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Gesellschaft der Freunde der Technischen Hochschule Danzig (Hrs.) 1979: *Beiträge und Dokumente zur Geschichte der Technischen Hochschule Danzig: 1904–1945. Zum 75. Gründungstag*. Hannover: Gesellschaft der Freunde der Technischen Hochschule Danzig. ISBN 10: 3879900329. ISBN 13: 9783879900329.

Glas, Eduard 2000: Model-Based Reasoning and Mathematical Discovery: The Case of Felix Klein. *Studies in History and Philosophy of Science* 31, ss. 71–86.

Gross, David J. 1988: Physics and Mathematics at the Frontier. *Proceedings of the National Academy of Science* 85, ss. 8371–8375. DOI: 10.1073/pnas.85.22.8371.

Hajduk, Zygmunt 1972: Pojęcie i funkcja modelu. *Roczniki Filozoficzne* 20, ss. 77–124.

Harman, Peter M. 1982: *Energy, Force, and Matter. The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0521288125.

Hashagen, Ulf 2003: *Walther von Dyck (1856–1934): Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag. ISBN 978-3515083591.

Hedgecoe, John; Moore, Henry 1968: *Henry Spencer Moore*. New York: Simon and Schuster. ISBN 978-0171410150.

Hervé, Jacques M. 2007: Théodore Olivier. [W:] *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies*. Cz. 1. Pod redakcją Marco Ceccarelliego. Dordrecht: Springer, ss. 295–318. DOI: 10.1007/978-1-4020-6366-413.

Instytut Henri Poincarégo 2018: Strona domowa. *Mathematical Models*. Dostęp online (6.09.2018): http://www.ihp.fr/en/node/404.

Karazin, V.N. 2018: Strona domowa projektu TouchGeometry Project. Dostęp online (6.09.2018): http://geometry.karazin.ua/en/geometric-models-collection.html.

Kidwell, Peggy Aldrich 1996: American Mathematics Viewed Objectively: The Case of Geometric Models. [W:] *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Pod redakcją Ronalda Calingera. Washington D.C.: Mathematical Association of America. ISBN 978-0883850978, ss. 197–208.

Lodder, Christina; Hammer, Martin 2000: *Constructing Modernity: The Art and Career of Naum Gabo*. New Haven, CT: Yale University Press. ISBN 978-0300076882.

Londyńskie Towarzystwo Matematyczne 2018: Strona domowa. *Plücker Collection*. Dostęp online (6.09.2018): https://www.lms.ac.uk/archive/plucker-collection.

Martin Luther University Halle-Wittenberg 2018: Inverse von Peaucellier. Schillingkatalog Klassifikation. Inventarnummer Ib-009. Dostęp online (2.09.2018): http://did2.mathematik.uni-halle.de/modell/modell.php?Nr=Ib-009.

Mathematics & Computer Science Library. The Hebrew University of Jerusalem 2018: Art in the library. Mathematical models display: http://math.huji.ac.il/~library/models.htm.

Mehrtens, Herbert 2004: Mathematical Models. [W:] *Models: The Third Dimension of Science*. Pod redakcją Sorayi de Chadarevian, Nicka Hopwooda. Stanford, CA: Stanford University Press. ISBN 978-0-804739-72-6, ss. 276–306.

Meinel, Christoph 2004: Molecules and Croquet Balls. [W:] *Models: The Third Dimension of Science*. Pod redakcją Sorayi de Chadarevian, Nicka Hopwooda. Stanford, CA: Stanford University Press. ISBN 978-0-804739-72-6, ss. 242–275.

Meinel, Christoph 2009: Kugeln und Stäbchen. Vom kulturellen Ursprung chemischer Modelle. *Kultur & Technik* 33, ss. 10–21.

Nawroczyński, Bogdan 1987: *Zasady nauczania*. Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. ISBN 9788302031939.

Neuwirth, Stefan 2014: *Modèles mathématiques du Laboratoire de mathématiques de Besançon*. Dostęp online (15.09.2018): http://epiphymaths.univ-fcomte.fr./modeles/.

Palladino, Nicla 1999–2000: *Le Raccolte Museali Italiane di Modelli per lo Studio delle Matematiche Superiori*. Dostęp online (15.09.2018): http://www.dma.unina.it/~nicla.palladino/catalogo/Italia_Index.html.

Palladino, Nicla; Palladino, Franco 2001: Sulle Raccolte Museali Italiane di Modelli per le Matematiche Superiori. *Nuncius* 16, ss. 781–790. DOI: 10.1163/182539101X00703.

Polo-Blanco, Irene 2007: *Theory and History of Geometric Models s.n.* Dostęp online (30.09.2018): https://www.rug.nl/research/portal/files/2803507/thesis.pdf.

Polo-Blanco, Irene 2011: Physical Models for the Learning of Geometry. *Nieuwe Wiskrant* 31-1, September 2011. Dostęp online (10.09.2018): http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/311/311september_polo.pdf.

Polo-Blanco, Irene; van der Zalm, Lotte 2018: Mathematical Models of Surfaces. Dostęp online (6.09.2018): http://www.math.rug.nl/models/.

Sattelmacher, Anja 2013: Geordnete Verhältnisse. Mathematische Anschauungsmodelle im frühen 20. Jahrhundert. *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 36, ss. 294––312. DOI: 10.1002/bewi.201301644.

Sattelmacher, Anja 2016: Präsentieren. Zur Anschauungs- und Warenökonomie mathematischer Modelle. [W:] *Sammlungsökonomien. Vom Wertökonomischer Dinge*. Pod redakcją Nilsa Güttlera, Iny Heumann. Berlin: Kadmos. ISBN 978-3865993335, ss. 131–155.

Schubring, Gert 2010: Historical Comments on the Use of Technology and Devices in ICMEs ad ICMI. *ZDM Mathematics Education* 42, ss. 5–9. DOI: 10.1007/s11858-010-0235-z.

Schubring, Gert 2016: Preface to the 2016 Edition. [W:] Felix Klein. *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint:* Volume I: *Arithmetic, Algebra, Analysis*. Berlin–Heidelberg: Springer. ISBN 978-3-662-49440-0, ss. v–xii.

Science Museum w Londynie 2018: Strona domowa. Fabre de Lagrange 1822. Dostęp online (6.09.2018): http://collection.sciencemuseum.org.uk/people/cp59104/fabre-de-lagrange.

Shell-Gellasch, Amy 2014: Mathematical Treasure: Hypotrochoid Kinematic Model by M. Schilling. Dostęp online (15.09.2018): https://www.maa.org/press/periodicals/mathematical-treasure-hypotrochoid-kinematic-model-by-m-schilling.

Shell-Gellasch, Amy 2015: The Schilling Kinematic Models at the Smithsonian. *Journal of Humanistic Mathematics* 5(1), ss. 167–179. DOI: 10.5642/jhummath.201501.09. Dostęp online (15.09.2018): http://scholarship.claremont.edu/jhm/vol5/iss1/9.

Sinclair, Nathalie 2008: Computer-Based Technologies and Plausible Reasoning. [W:] *Making the Connection: Research and Practice in Undergraduate Mathematics*. Pod redakcją Marilyn P. Carlson, Chrisa Rasmussena. Washington, DC: Mathematical Association of America. ISBN 978-0883851838, ss. 233–244.

Smithsonian Institution. National Museum of American History 2018: Strona domowa. Kinematic Models: Introduction. Dostęp online (6.09.2018): https://www.si.edu/spotlight/kinematic-models.

Struik, Dirk J. 1960: *Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Szumilewicz, Irena 1974: Kryzys mechanicyzmu w fizyce (wiek XIX i początek wieku XX). [W:] *Z dziejów mechanicyzmu w fizyce i chemii*. Pod redakcją Władysława Krajewskiego, Adama Synowieckiego, Ireny Szumilewicz. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich, ss. 37–90.

Uniwersytet Stanu Illinois 2018: Strona domowa. The Altgeld Math Models. Dostęp online (6.09.2018): http://www.mathmodels.illinois.edu/cgi-bin/cview?SITEID=4&ID=342.

Uniwersytet w Utrechcie 2018: Strona domowa. 3D Geometric Models. Dostęp online (6.09.2018): https://www.uu.nl/en/research/3d-geometric-models/series-xxiv.

Vierling-Claassen, Angela 2007: *Mathematical Models at the Massachusetts Institute of Technology*, June 26, 2007, ss. 131. Dostęp online (2.09.2018): https://www.academia.edu/31570834/Mathematical_Models_at_the_Massachusetts_Institute_of_Technology.

Vierling-Classen, Angela 2010: Models of Surfaces and Abstract Art in the Early 20th Century. [W:] *Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. Pod redakcją George'a W. Harta, Rezzy Srhangi. Pécs: Tessellations Publishing. ISBN 9780984604203, ss. 11–18.

Vierling-Claasen, Angela 2018: Strona domowa. Mathematics for the People. Collections of Mathematical Models. Dostęp online (6.09.2018): https://angelavc.wordpress.com/collections-of-mathematical-models/.

Xavier, João P.; Pinho, Eliana M. 2016: On the *Biais Passé*: The Olivier String Model and the Representation of Constructive Solutions for the Skew Arch. [W:] Giuseppe Amoruso (red.), *Handbook of Research on Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools*. Hershey, PA: IGI Global. ISBN 9781522500292, ss. 337–366. Dostęp online: https://books.google.pl/books?id=XewODAAAQBAJ&pg=PA337.

Xavier, João P.; Pinho, Eliana M. 2017: The Olivier String Models and the Teaching of Descriptive Geometry. [W:] Kristín Bjarnadóttir, Fulvia Furinghetti, Marta Menghini, Johan Prytz, Gert Schubring (eds.), *"Dig where you stand" 4: Proceedings of the fourth international conference on the History of Mathematics Education*, September 23–26, 2015, at University of Turin, Italy. Roma: Edizioni Nuova Cultura. ISBN: 9788868129286, ss. 399–414. Dostęp online: https://books.google.pl/books?id=lbY9DwAAQBAJ&pg=PA400.